BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2010

İKİÖLÇÜLÜ DALĞA TƏNLİYİNİN I TƏRTİBDƏN OPTİMAL OPERATORLAR SİSTEMİ

Ə.Q.AĞAMALIYEV, A.Ş.AŞUROVA
Bakı Dövlət Universiteti
Physics @ bsu.az

Məqalədə dalğa tənliyinin invariantlıq operatorlarından istifadə edərək operatorların kommutasiyaları hesablanıb. Alınmış ifadələrdən istifadə edərək, ad x operatoru hesablanmış və bunun vasitəsilə də Küllinqin kvadratik forması hesablanmışdır.Həmin kvadratik formadan istifadə edərək, invariantlıq operatorlarının optimal sistemi tapılmşdır.

Əvvəlki işimizdə [1] ikiölüçülü dalğa tənliyinin invariantlıq qrupunun operatorları təyin edilmişdir. I tərtibdən optimal operatorlar sistemini təyin etmək üçün I yaxınlaşmada həmin operatorların kommutasiya şərtlərini bilmək lazımdır. Təqdim olunmuş işdə həmin operatorların kommutasiya şərti tapılmış və cədvəl şəklində verilmişdir:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}
X_1	0	0	0	X_1	0	X_2	X_3	$2X_6$	$2X_7$	$2X_4-X_{11}$	0
X_2	0	0	0	X_2	X_3	X_1	0	$2X_4-X_{11}$	$-2X_5$	$2X_6$	0
X_3	0	0	0	X_3	$-X_2$	0	X_1	$2X_5$	$2X_4-X_{11}$	$2X_7$	0
X_4	$-X_1$	$-X_2$	$-X_3$	0	0	0	0	X_8	X_9	X_{10}	0
X_5	0	$-X_3$	X_2	0	0	$-X_7$	X_6	$-X_9$	X_8	0	0
X_6	$-X_2$	$-X_1$	0	0	X_7	0	X_5	X_{10}	0	X_8	0
X_7	$-X_3$	0	$-X_1$	0	$-X_6$	$-X_5$	0	0	X_{10}	X_9	0
X_8	$-2X_6$	$-2X_4+X_{11}$	$-2X_5$	$-X_8$	X_9	$-X_{10}$	0	0	0	0	0
X_9	$-2X_7$	$2X_5$	$-2X_4+X_{11}$	$-X_9$	$-X_8$	0	$-X_{10}$	0	0	0	0
X_{10}	$-2X_4+X_{11}$	$-2X_6$	$-2X_7$	$-X_{10}$	0	$-X_8$	$-X_9$	0	0	0	0
X_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Kommutasiya şərtindən görünür ki, X_{11} operatoru qalan operatorların hər biri ilə kommutasiya edir. Ona görə də L_{11} - Li cəbrini

$$L_{11} = L(X_{11}) \oplus L(X_i) \qquad (i = 1,2,\dots,10)$$

düz cəmi şəklində ifadə etmək olar.

Kommutasiya cədvəlində $X_i(i = 1,2,\dots,11)$ bazis vektorlarında $X_i(i = 1,2,\dots,10)$ və $X'_4 = 2X_4 - X_{11}$ bazisinə keçmək daha məqsədəuyğundur. Yeni bazis vektorlarına görə kommutasiya cədvəli aşağıdakı şəkli alır:

Cədvəl

	X_1	X_2	X_3	X'_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
X_1	0	0	0	$2X_1$	0	X_2	X_3	$2X_6$	$2X_7$	X'_4
X_2	0	0	0	$2X_2$	X_3	X_1	0	X'_4	$-2X_5$	$2X_6$
X_3	0	0	0	$2X_3$	$-X_2$	0	X_1	$2X_5$	$2X_6$	$2X_7$
X'_4	$-2X_1$	$-2X_2$	$-2X_3$	0	0	0	0	$2X_8$	$2X_9$	$2X_{10}$
X_5	0	$-X_3$	X_2	0	0	$-X_7$	X_6	$-X_9$	X_8	0
X_6	$-X_2$	$-X_1$	0	0	X_7	0	X_5	X_{10}	0	X_8
X_7	$-X_3$	0	$-X_1$	0	$-X_6$	$-X_5$	0	0	X_{10}	X_9
X_8	$-2X_6$	$-X'_4$	$-2X_5$	$-2X_8$	X_9	$-X_{10}$	0	0	0	0
X_9	$-2X_7$	$2X_5$	$-X'_4$	$-2X_9$	$-X_8$	0	$-X_{10}$	0	0	0
X_{10}	$-X'_4$	$-2X_6$	$-2X_7$	$-2X_{10}$	0	$-X_8$	$-X_9$	0	0	0

Hesablamada optimal operatorlar sisteminin taplması üçün növbəti addım *ad (x,y)* operatorunu tapmaqdan ibarətdir. Təqdim olunmuş işdə həmin operator tapılmışdır. Hesablamanın kifayət qədər uzun olduğunu nəzərə alaraq işdə yalnız hesablamanın nəticəsi verilmişdir.

$$adx = \begin{pmatrix} -2x_4 & -x_7 & -x_7 & 2x_1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 \\ -x_6 & -2x_4 & x_5 & 2x_2 & -x_3 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_7 & -x_5 & -2x_4 & 2x_3 & x_2 & 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ -x_{10} & -x_8 & -x_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & x_3 & x_1 \\ 0 & 2x_9 & -2x_8 & 0 & 0 & -x_7 & x_6 & 2x_3 & -2x_2 & 0 \\ -2x_8 & -2x_{10} & 0 & 0 & -x_7 & 0 & x_5 & 2x_1 & 0 & 2x_2 \\ -2x_9 & 0 & -2x_{10} & 0 & x_6 & -x_5 & 0 & 0 & 2x_1 & 2x_3 \\ 0 & 0 & 0 & -2x_8 & -x_9 & -x_{10} & 0 & 2x_4 & x_5 & x_6 \\ 0 & 0 & 0 & -2x_9 & x_8 & 0 & -x_{10} & -x_5 & 2x_4 & x_7 \\ 0 & 0 & 0 & -2x_{10} & 0 & -x_8 & -x_9 & x_6 & x_7 & 2x_4 \end{pmatrix}$$

ad x operatorunun ifadəsindən istifadə edərək

$$K(x,x) = Sp(adx, adx)$$

Küllinqin invariant kvadratik forması hesablanmışdır və həmin kvadratik forma bu şəkildədir:

$$K(x,x) = 24x_4^2 + 6x_6^2 + 6x_7^2 - 6x_5^2 - 24x_1x_{10} - 24x_2x_8 - 24x_3x_9$$

Bundan sonra I tərtibdən optimal sistemini tapmaq üçün [2]

$$\frac{d}{dt}(x_i', X_i) = [x_i X_i, X_k]$$

tənliklər sistemini $x_i(t) = x_i(o)$ şərti daxilində həll edib çevirmədən sonra alınan x_i -ləri köhnə koordinantlar vasitəsilə ifadə etmək lazım gəlmişdir.

Həmin tənlik dalğa tənliyinin invariantlıq operatorlarının hər biri üçün həll edilmiş və uyğun çevirmə matrisaları tapılmışdır. Çevirmə matrisalarının hər biri 10 tərtibli kvadratik matrisalardan ibarətdir və matrisaların sayı 10 dənə alınmışdır. Bu matrisaların aşkar şəkli tapılmışdır. Matrisaların ifadələri kifayət qədər uzun olduğundan qısadılmış şəkildə verilmişdir:

$$A_1, A_2, \ldots, A_{10}x = \begin{pmatrix} x_1' - t_3x_7' + t_3^2x_{10}' - t_2x_6' + t_2x_{10}' - 2t_1(x_4' - t_3x_9' - t_2x_8') + t_1^2x_{10}' \\ x_2' - t_3x_5' + t_3^2x_8' - 2t_2(x_4' - t_3x_9') + t_2x_8' - t_1(x_6' - 2t_2x_{10}') + t_1^2x_8' \\ x_3' - 2t_3x_4' + t_3x_9' - t_2(x_5' - 2t_3x_8') - t_2^2x_9' - t_1(x_7' - 2t_3x_{10}') + t_1^2x_9' \\ x_4' - t_3x_9' - t_2x_8' - t_1x_{10}' \\ x_5' - 2t_3x_8' - 2t_2x_9' \\ x_6' - 2t_2x_{10}' - 2t_1x_8' \\ x_7' - 2t_3x_{10}' - 2t_1x_9' \\ x_8' \\ x_9' \end{pmatrix}$$

$$x_1' = x_1e^{2t_4}cht_6cht_7$$

$$x_2' = x_2e^{2t_4}\cos t_5sht_6$$

$$x_3' = x_3e^{2t_4}\sin t_5sht_7$$

$$x_4' = x_4 + t_9x_3 + t_8x_2 + t_{10}x_1$$

$$x_5' = (x_5 + 2t_8x_3 - 2t_9x_2)cht_6cht_7$$

$$x_6' = (x_6 + 2t_{10}x_2 + 2t_8x_1)\cos t_5sht_7$$

$$x_7' = (x_7 + 2t_{10}x_3 + 2t_9x_1)\sin t_5sht_6$$

$$x_8' = e^{-2t_4}\cos t_5cht_6\left[x_8 + x_6t_{10} + x_5t_9 + x_4\cdot 2t_8 + x_3\cdot 2t_8t_9 + x_2\left(t_8^2 - t_9^2 + t_{10}^2\right) + 2t_8t_{10}x_1\right]$$

$$x_9' = e^{-2t_4}\sin t_5sht_7\left[x_9 + x_7t_{10} - x_5 2t_8 + x_4\cdot 2t_9 + x_3(-2t_8^2 + t_9^2 + t_{10}^2) + x_2\cdot 4t_8t_9x_1 + 2t_9t_{10}x_1\right]$$

$$x_{10}' = e^{-2t_4}sht_6cht_7\left[x_{10} + t_9x_7 + t_8x_6 + 2t_9t_{10}x_3 + 2t_{10}x_4 + 2t_8t_{10}x_2 + x_1(t_8^2 + t_9^2 + t_{10}^2)\right]$$

Yuxarıda göstərdik ki, Küllinqin kvadratik forması doğrudan da, daxili izomorfizm əməliyyatı zamanı invariant qalır, yəni çevrilmədən sonra alınmış Küllinqin kvadratik forması

$$K(x,x) = 24x_4'^2 + 6x_6'^2 + 6x_7'^2 - 6x_5'^2 - 24x_1'x_{10}' - 24x_2'x_3' - 24x_3'x_9'$$

əvvəlki forma ilə üst-üstə düşür. Ona görə də kvadratik formanın hesablanmasını düzgün hesab edərək dalğa tənliyinin I tərtibdən optimal operatorlar sistemini Küllinqin kvadratik formasının xassələrindən istifadə edərək $K(x,x)>0$, $K(x,x)<0$ və $K(x,x)=0$ halları üçün aşağıdakı kimi təyin etmiş oluruq:

1) $K(x,x)>0$ olan halda, birölçülü optimal operatorlar sisteminə X_4, X_6 və X_7 operatorları daxil olur.

2) $K(x,x)<0$ olan halda, birölçülü optimal operatorlar sisteminə $X_5, X_1 \pm X_{10}, X_2 \pm X_{8,} X_3 \pm X_9$ operatorları daxildir.

3) $K(x,x)=0$ olan halda, birölçülü optimal operatorlar sisteminə $X_1 \pm X_3, X_{10} \pm X_{9,} X_2 \pm X_3, X_8 \pm X_9, X_1 \pm X_2, X_{10} \pm X_8$ operatorları daxildir.

Hər üç halda I tərtibdən optimal operatorlar sistemini tapmış olduq.

ƏDƏBİYYAT

1. Ağamalıyev Ə.Q. Journal of Qafqaz University, 2009, №25, p. 36-39.
2. Овсянников Л.В. Групповой анализ диффер - уравнений. М.: Наука, 1978, с. 190-198.

ОПТИМАЛЬНАЯ СИСТЕМА ОПЕРАТОРОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ДВУМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

А.Г.АГАМАЛЫЕВ, А.Ш.АШУРОВА

РЕЗЮМЕ

В статье, используя операторы инвариантности волнового уравнения, вычислены операторы коммутации. На основе полученных выражений вычислен оператор adx, а с его помощью и квадратичная форма Киллинга. Используя полученную квадратичную форму, найдена оптимальная система инвариантных операторов.

OPTIMAL SYSTEM OF THE FIRST ORDER OPERATORS OF TWO-DIMENSIONAL WAVE EQUATION

A.Q.AGAMALIYEV, A.Sh.ASHUROVA

SUMMARY

In this paper, using the invariancy operators of the wave equation, the commutation operators are calculated. On the basis of the received expressions adx operator is calculated, and Killinq square-law form is obtained with its help. Using this square-law form the optimal system of invariant operators is found.